

JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **30**, 169–172 (1980)Zur Rationalen Approximation von  $e^{-x}$  auf  $[0, \infty)$ 

H.-P. BLATT

*Fakultät für Mathematik und Informatik,  
Universität Mannheim, 6800 Mannheim, West Germany*

UND

D. BRAESS

*Institut für Mathematik,  
Ruhr-Universität, Bochum, 4630 Bochum, West Germany**Communicated by Richard S. Varga*

Received April 11, 1979

It is shown that an approximation of  $e^{-x}$  on  $[0, \infty)$  by rational functions of degree  $n$  cannot be better than  $52^{-n}$ . This improves the bound given by Rahman and Schmeißer, (*J. Approx. Theory* **23** (1978), 246–254; *Trans. Amer. Math. Soc.* **235** (1978), 395–402).

Sei  $\Pi_k$  die Menge der reellen Polynome, deren Grad  $k$  nicht übersteigt. Dann beschreibt

$$\lambda_{m,n} = \max_{p \in \Pi_m, q \in \Pi_n} \left\| e^{-x} - \frac{p}{q} \right\|$$

die Approximierbarkeit von  $e^{-x}$  über  $[0, \infty)$  im Sinne von Tschebyscheff, wenn sich die Norm  $\|\cdot\|$  auf die Supremum-Norm bezieht. Bekannt ist das asymptotische Verhalten nur von  $\lambda_{0,n}$ . Schönhage [4] zeigte 1973  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{0,n}^{1/n} = \frac{1}{3}$ . Auch im allgemeinen Fall ist keine bessere als geometrische Konvergenz möglich. Dies wurde zuerst von Newman [2] mit dem Nachweis von  $\lambda_{n-1,n} > 1280^{-n}$  gezeigt. Rahman und Schmeißer [3] erzielten mit  $308^{-n} \leq \lambda_{n-1,n} \leq 4.08^{-n}$  eine bessere Einschließung. Die untere Schranke soll hier weiter verbessert werden. Da die numerischen Ergebnisse von Cody, Meinardus und Varga [1] auf ein asymptotisches Verhalten von  $\lambda_{n-1,n} \sim 9^{-n}$  hindeuten, ist unsere Schranke zweifellos immer noch zu grob.

**SATZ.** Für alle natürlichen Zahlen  $n$  ist

$$\lambda_{n-1,n} > 54^{-n}.$$

*Beweis.* Anstatt  $e^{-x}$  werden wir  $a^{-x}$  mit  $a > 2$  approximieren, wobei  $a$  erst später festgelegt wird. Es sei  $p \in \Pi_{n-1}$ ,  $q \in \Pi_n$  und

$$\left| a^{-x} - \frac{p(x)}{q(x)} \right| \leq \rho \quad \text{für } x \in [0, 2n]. \quad (1)$$

Normieren wir  $q$  auf den ganzen Zahlen zwischen 0 und  $2n$  gemäß

$$\max_{0 \leq r \leq 2n} 2^{-r} |q(r)| = 1, \quad (2)$$

so erhalten wir für  $r(x) := q(x) - a^x p(x)$ ,  $x = 0, 1, \dots, 2n$  aus (1):

$$|r(x)| \leq \rho a^x |q(x)| \leq \rho (2a)^x. \quad (3)$$

Sei  $E$  der Verschiebungsoperator, der gemäß  $Ef(x) = f(x+1)$  operiert,  $I$  die Identität und  $A = E - I$  der Differenzenoperator. Aus (3) erhält man für  $x = 0, 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} |(E - aI)^n q(x)| &= |(E - aI)^n |q(x) - a^x p(x)|| \\ &\leq (E + aI)^n |r(x)| \\ &\leq \rho (3a)^n (2a)^x. \end{aligned} \quad (4)$$

Man beachte, daß  $S(x) := (E - aI)^n q(x)$  ein Polynom ist. Deshalb bricht die Reihe, die man aus der Potenzreihe für  $(1-x)^{-n}$  zur Inversion von  $(E - aI)^n$  gewinnt, bereits nach endlich vielen Gliedern ab. Es ist

$$\begin{aligned} q(x) &= (E - aI)^{-n} S(x) \\ &= (1-a)^{-n} \cdot \left( I - \frac{1}{a-1} A \right)^{-n} S(x) \\ &= (1-a)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n+j-1}{j} \frac{A^j S(x)}{(a-1)^j}. \end{aligned}$$

Bei Anwendung des Differenzenoperators  $A^k$  für  $k = 0, 1, \dots, n$  entfallen wieder  $k$  Terme:

$$A^k q(x) = (1-a)^{-n} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n+j-1}{j} \frac{A^{j+k} S(x)}{(a-1)^j}.$$

Aus (4) folgt nun  $|\Delta^m S(0)| \leq \rho (3a)^n (1+2a)^m$  und für  $k=0, 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} |\Delta^k q(0)| &\leq \rho \left( \frac{3a}{a-1} \right)^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n+j-1}{j} \frac{(1+2a)^{j+k}}{(a-1)^j} \\ &< \rho \left( \frac{3a}{a-1} \right)^n (1+2a)^n \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} \frac{1}{(a-1)^j} \\ &= \rho \left( \frac{3a}{a-1} \right)^n (1+2a)^n \left[ 1 - \frac{1}{a-1} \right]^{-n} \\ &= \rho \frac{(3a)^n (1+2a)^n}{(a-2)^n}. \end{aligned} \quad (5)$$

Für  $k > n$  verschwinden die Differenzenquotienten. Deshalb erhalten wir schließlich aus (5) für jede natürliche Zahl  $v \geq 0$  die Abschätzung:

$$\begin{aligned} |q(v)| &= |(I + \Delta)^v q(0)| \\ &\leq \sum_{k=0}^v \binom{v}{k} |\Delta^k q(0)| \\ &< \rho \frac{(3a)^n (1+2a)^n}{(a-2)^n} 2^v. \end{aligned} \quad (6)$$

Setzt man  $a=4$ , führt dies zu  $|q(v)| < \rho \cdot 54^n \cdot 2^v$ . Wegen der Normierung (2) muß also

$$\rho > 54^{-n}$$

sein. ■

Eine geringfügig schärfere Schranke erzielt man noch durch eine Variation von  $a$  und den versteckten Parametern. Man modifiziert den Vorgang, mit dem Formel (5) gewonnen wurde. Für  $c > 1$  ist

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n+j-1}{j} \frac{c^{j+k}}{(a-1)^j} \\ &= \left( \frac{3}{4} \right)^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n+j-1}{j} \frac{((4/3)c)^{j+k}}{[(4/3)(a-1)]^j} \\ &\leq \left( \frac{3}{4} \right)^k \left( \frac{4}{3}c \right)^n \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} \frac{1}{[(4/3)(a-1)]^j} \\ &= \left( \frac{3}{4} \right)^{k-n} c^n \left( \frac{a-1}{a-7/4} \right)^n. \end{aligned}$$

Ersetzt man die Normierung (2) durch  $\max\{(\frac{7}{4})^{-r} |q(v)|\} = 1$ , so erhält man anstatt von (6):

$$|q(v)| < \rho \left( \frac{11}{3} + \frac{a(4+7a)}{4a-7} \right)^n \left( \frac{7}{4} \right)^r.$$

Die Wahl  $a = 15/4$  führt zu

$$\lambda_{n-1,n} > (6655/128)^{-n} > 52^{-n}.$$

## LITERATUR

1. W. J. CODY, G. MEINARDUS, AND R. S. VARGA, Chebyshev rational approximations to  $e^{-x}$  in  $[0, \infty)$  and applications to heat-conduction problems, *J. Approx. Theory* **2** (1969), 50–65.
2. D. J. NEWMAN, Rational Approximation to  $e^{-x}$ , *J. Approx. Theory* **10**(1974), 301–303.
3. Q. I. RAHMAN AND G. SCHMEISSER, Rational Approximation to  $e^{-x}$ , *J. Approx. Theory* **23** (1978), 246–254; und *Trans. Amer. Math. Soc.* **235** (1978), 395–402.
4. A. SCHÖNHAGE, Zur rationalen Approximierbarkeit von  $e^{-x}$  über  $[0, \infty]$ , *J. Approx. Theory* **7** (1973), 395–398.